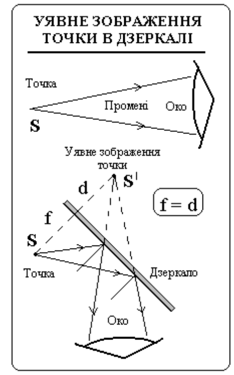
ГЕОМЕТРИЧНА ОПТИКА

Основні оптичні елементи для приладів геометричної оптики

1. Утворення зорових зображень

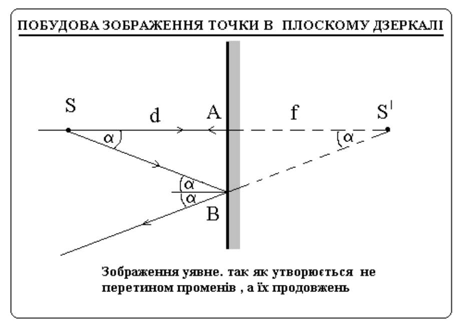
На основі уявлень про хвильовий фронт можна обґрунтувати закони відбивання та заломлення світла. Маючи ці закони, можна пояснити характер утворення зорових зображень в результаті відбивання та заломлення світла на поверхнях розділу двох середовищ. Достатньо просто це можна зробити розглядаючи хід світлових променів від світної точки до ока. Око бачить цю точку, як центр розбіжного пучка променів, що попадають і нього в напрямку цих променів. Якщо ці промені потраплять в око після відбивання від дзеркальної поверхні, то око має бачити точку на перетині продовжень променів, тобто уявну точку, яка буде дзеркальним зображенням дійсної.



2. Плоске дзеркало

Побудуємо зображення точки в плоскому дзеркалі, розглянувши хід двох променів, що виходять з точки після відбивання від дзеркала. Перший з променів перпендикулярний до поверхні дзеркала, другий падає під довільним кутом.

З рівності прямокутних трикутників SAB та $S'AB$ випливає, що точка та її зображення лежать на одному перпендикулярі до поверхні дзеркала, рівновіддалені від нього в протилежних напрямках.



3. Плоскопаралельна пластинка

При проходженні променів через плоскопаралельну пластинку товщиною H промінь не змінює свого напрямку, лише зміщуючись на величину x.

$$x = AB \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

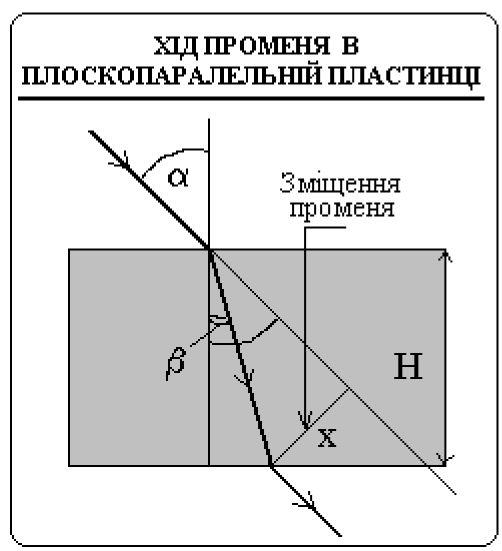
$$AB = \frac{H}{\cos\beta},$$

$$x = H(\sin\alpha - \cos\alpha \,\mathrm{tg}\,\beta).$$

За законом заломлення

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n},$$

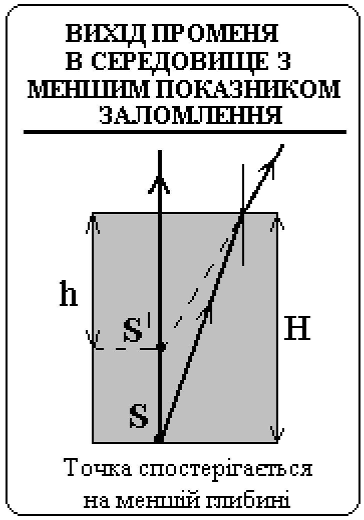
$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}.$$

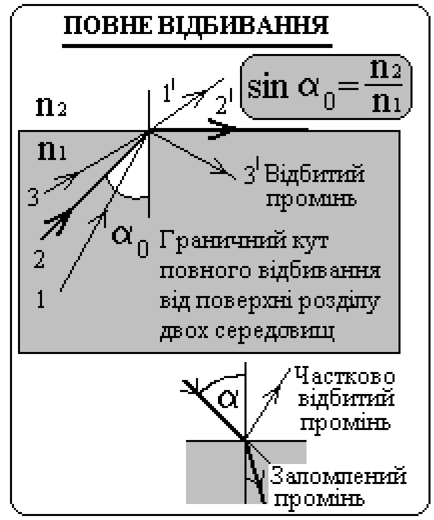


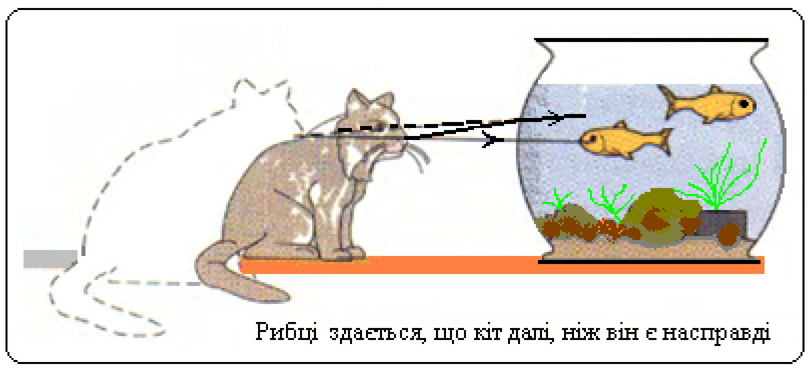
Наведені співвідношення дозволяють пов'язати зміщення і товщину пластини.

4. Повне відбивання

При падінні променя на поверхню розділу двох середовищ при виході променя в оптично менш густе середовище (з меншим показником заломлення) може спостерігатися *повне (іноді кажуть внутрішнє) відбивання* від цієї поверхні на відміну від часткового, яке завжди має місце.







Кут падіння, починаючи з якого спостерігається це явище, називається граничним кутом повного відбивання.

Величину цього кута α_0 можна визначити за законом заломлення, врахувавши, що такому кутові падіння відповідає прямий кут заломлення, тобто

$$\frac{\sin\alpha_0}{\sin 90^0} = \frac{n_2}{n_1},$$

або

$$\sin\alpha_0 = \frac{n_2}{n_1}.$$

Якщо перше (вихідне) середовище має показник заломлення $n_1 = n$, а друге (вхідне) середовище є вакуумом, або повітрям ($n_2 = 1$), то

$$\sin\alpha_0 = \frac{1}{n}.$$

5. Тригранна призма

Нескладно побудувати хід променів у трикутній призмі зі заломлюючим кутом φ при вершині та знайти кут відхилення θ вихідного променя від напрямку вхідного.

Одразу помітно, що кут φ між гранями рівний гострому кутові між перпендикулярами до цих граней і, як зовнішній кут трикутника з кутами β_1 та α_2, рівний сумі цих кутів.

Так само кут відхилення θ,

$$\theta = \alpha_1 - \beta_1 + (\beta_2 - \alpha_2),$$

або, після підстановки φ,

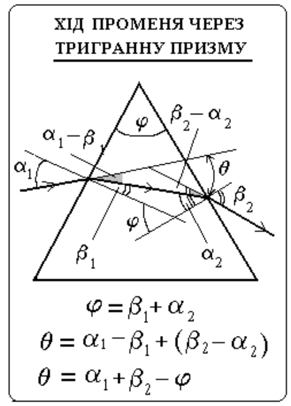
$$\theta = \alpha_1 + \beta_2 - \varphi.$$

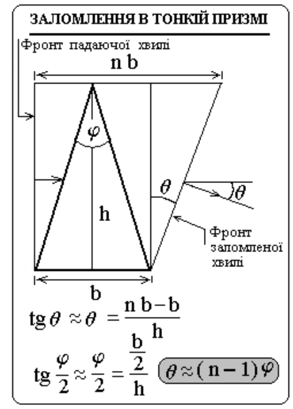
У випадку *тонкої призми* ($\varphi \approx 0$) при малих кутах падіння променя $\alpha_1 \approx 0$, можна синуси кутів замінити самими кутами в радіанах, і записати за законом заломлення

$$\beta_2 \approx n\,\alpha_2 \text{ та } \alpha_1 \approx \beta_1 n.$$

Після підстановки матимемо

$$\theta \approx \beta_1 n + \alpha_2 n - \varphi = (n-1)\,\varphi.$$





Корисно зробити такі обрахунки на основі хвильових уявлень.

В результаті проходження призми, вертикальний фронт падаючої хвилі нахиляється до основи, оскільки різні частини фронту проходять різні шляхи в середовищі призми і нижні дільниці відстають від верхніх. Відношення шляхів пройдених верхньою і нижньою точкою фронту буде рівне відношенню швидкостей хвилі в оточуючому середовищі та призмі , тобто рівне показнику заломлення призми відносно оточуючого середовища.

З малюнка видно, що

$$tg\theta \approx \theta = \frac{nb-b}{h} = \frac{b}{h}(n-1)$$

та

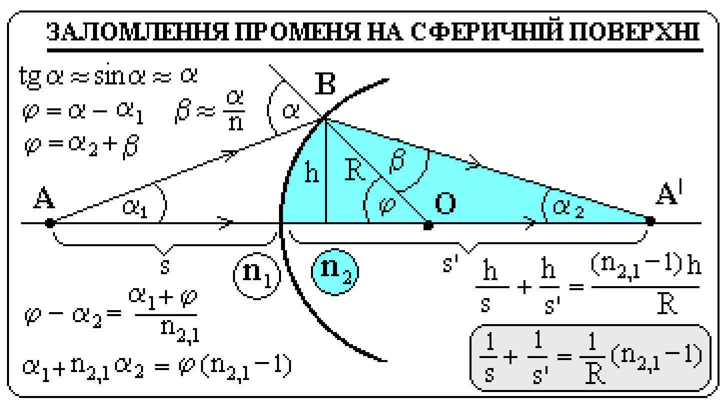
$$tg\frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi}{2} = \frac{b}{2h}.$$

З цих співвідношень, як і в попередніх розрахунках,

$$\theta \approx (n-1)\,\varphi.$$

6. Заломлення променя на сферичній поверхні

Побудуємо зображення A^I точки A, утворене в результаті заломлення сферичною поверхнею, радіусом кривизни R та показником заломлення відносно оточуючого середовища $n_{2,1} > 1$. Для цього розглянемо хід двох близьких променів, що виходять з даної точки A, один з яких напрямлений до центра кривизни, а інший падає на поверхню під кутом α. Перший промінь не зазнає заломлення, другий, який виходить під кутом α_1 до напрямку на центр кривизни,



після заломлення утворить кут β з нормаллю в точці падіння і кут α_2 з прямою, що проходить через центр кривизни поверхні. Напрямок нормалі визначиться радіусом проведеним з центра кривизни в точку падіння під кутом φ). Точка перетину променів після заломлення буде точкою зображення A^I. Кути α та φ, як зовнішні кути трикутників ABO та A^IBO, будуть рівними

$$\alpha = \alpha_1 + \varphi \ (1)$$

та

$$\varphi = \beta + \alpha_2 .$$

Виключимо α, скориставшись законом заломлення і врахувавши, що, для малих кутів, відношення синусів можна замінити відношенням самих кутів

$$\alpha = n_{2,1}\,\beta.$$

З другої рівності

$$\beta = \varphi - \alpha_2 .$$

Тому

$$\alpha = n_{2,1}\,\varphi - n_{2,1}\,\alpha_2 .$$

Рівність (1) запишеться

$$n_{2,1}\,\varphi - n_{2,1}\,\alpha_2 .= \alpha_1 + \varphi,$$

або

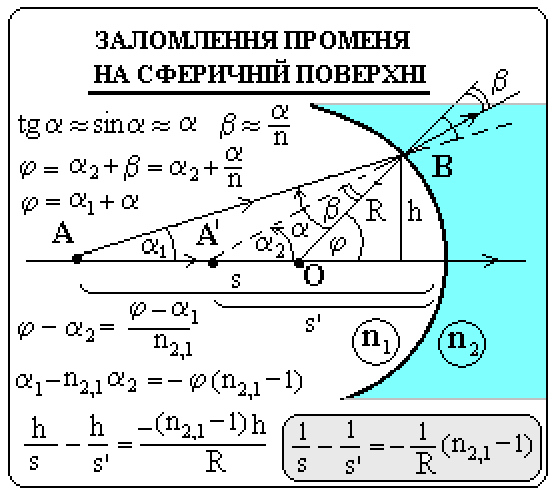
$$(n_{2,1} - 1)\,\varphi = \alpha_1 + n_{2,1}\,\alpha_2 .$$

Знову врахувавши малість кутів, запишемо

$$(n_{2,1} - 1)\frac{h}{R} = \frac{h}{s} + n_{2,1}\frac{h}{s'},$$

або

$$(n_{2,1} - 1)\frac{1}{R} = \frac{1}{s} + \frac{n_{2,1}}{s'}.$$



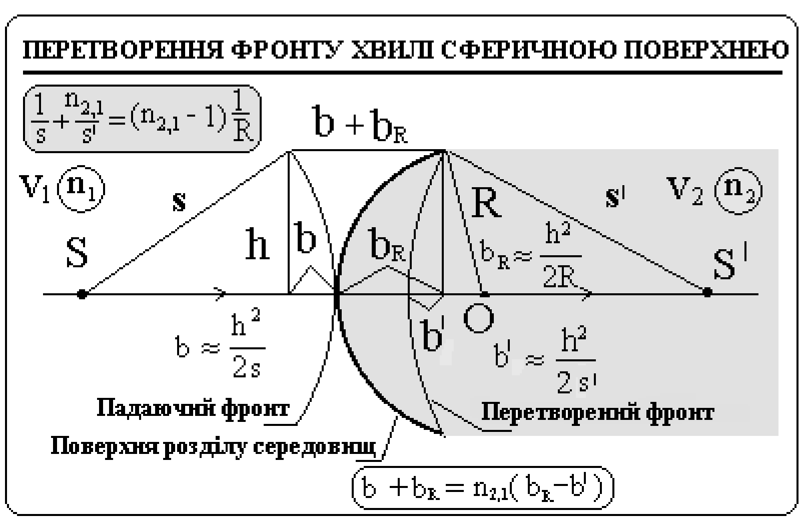
Нескладно переконатися (див мал.), розглянувши заломлення при падінні променя на увігнуту поверхню та випадок уявного зображення, що відстань до уявної точки входить у формулу зі знаком мінус. Такого знаку набуває також радіус поверхні у випадку, якщо її опуклість звернута до середовища з меншим показником заломлення. Тож у загальному випадку

$$\pm\frac{1}{s} \pm \frac{n_{2,1}}{s'} = \pm\frac{1}{R}(n_{2,1} - 1).$$

7. Перетворення фронту хвилі сферичною поверхнею

Попередній результат цілком відповідає хвильовій теорії світла.

Нехай сферичний фронт радіусом s віл точкового джерела A падає на сферичну поверхню радіусом R, що розділяє два середовища з показниками заломлення n_1 та n_2 з відносним показником $n_{2,1}$, і в результаті заломлення перетворюється в сферичний фронт радіусом s' , центром якого буде точка A', яка і буде зображенням точки A.



Знайдемо зв'язок між відстанями до світної точки та її зображенням. Проведемо пряму паралельну AA^{l} і опустимо перпендикуляри з точок перетину цієї прямої з поверхнями фронтів хвиль та поверхні розділу середовищ на AA^{l}, обравши довжину перпендикулярів h значно меншою відстані b їх основ до поверхонь

$$b << h.$$

За теоремою Піфагора, для кожного трикутника, утвореного перпендикуляром та радіусом такої поверхні $r = s$

$$(s-b)^2 + h^2 = s^2,$$

або

$$s^2 - 2sb + b^2 + h^2 = s^2,$$

звідки, нехтуючи b^2, отримаємо

$$b \approx \frac{h^2}{2s}.$$

Врахуємо, що радіус падаючого фронту рівний відстані s до точки предмета, заломленого – відстані s^{l} до точки зображення, при радіусі заломлюючої поверхні R. На основі попереднього, для відстаней відповідних основ перпендикулярів, матимемо:

$$b \approx \frac{h^2}{2s},$$

$$b^{l} = \frac{h^2}{2s^{l}}$$

та

$$b_R = \frac{h^2}{2R}.$$

Так як час руху крайньої і центральної точок фронту однаковий, то відношення відстаней $b + b_R$ та $b_R - b^{l}$, пройдених хвилею, буде рівне відношенню швидкостей хвилі в середовищах, тобто відносному показнику заломлення.

$$b + b_R = n_{2,1}(b_R - b^{l}) = n_{2,1}b_R - n_{2,1}b^{l}$$

або

$$b + n_{2,1}\, b^{l} = b_R\,(n_{2,1} - 1)$$

Після підстановки отримаємо

$$\frac{h^2}{2s} + \frac{n_{2,1}h^2}{2s^{l}} = \frac{h^2}{2R}(n_{2,1} - 1)$$

$$\frac{1}{s} + \frac{n_{2,1}}{s^{l}} = \frac{1}{R}(n_{2,1} - 1)$$

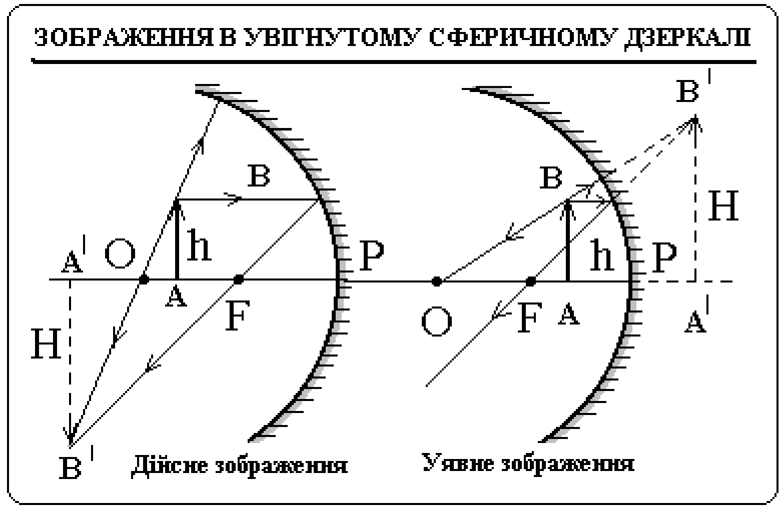
Якщо фронт заломленої хвилі не змінює опуклості на увігнутість, залишаючись опуклим, то зображення джерела буде зліва від границі середовища, тобто уявним, і знак перед s^{l} в останній формулі зміниться на протилежний.

$$b + b_R = n_{2,1}(b_R + b^{l}),$$

Можна перевірити, що зміна опуклості на увігнутість та навпаки приводить до зміни знака перед відповідним значенням b та відстані в формулі заломлення.

8. Формула сферичного дзеркала

Сферичне дзеркало – це сегмент сферичної поверхні здатний дзеркально відбивати світло. Вершина сегменту називається полюсом. Прямі, що проходять через центр сферичної поверхні називаються *оптичними осями*. Та з них, що проходить також через полюс, є *головною оптичною віссю*. Точка головної оптичної осі, через яку проходять лінії променів, близьких та паралельних цій осі, після відбивання від дзеркала, називається *фокусом*.



Оскільки відбивання від сферичної поверхні можна подати як заломлення з показником $n_{2,1} = -1$, то, на основі попереднього, можна записати формулу опуклого сферичного дзеркала.

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = -\frac{2}{R}$$

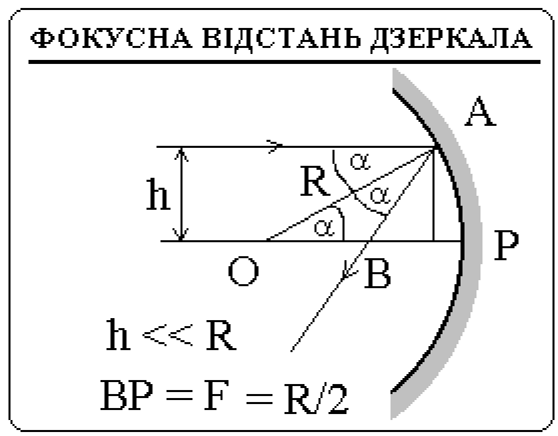
Якщо врахувати правило знаків, за яким відстань до уявної точки береться із знаком (-), то формула сферичного дзеркала запишеться

$$\pm\frac{1}{s} \pm \frac{1}{s'} = \pm\frac{2}{R}.$$

З останньої формули, поклавши $s = \infty$ отримаємо, що фокусна відстань дзеркала

$$F = \frac{R}{2}$$

Такий же результат випливає з побудови на малюнку.



Приклади

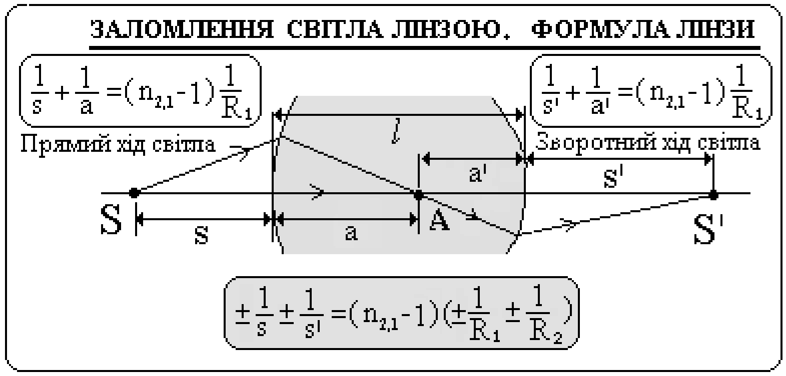
1. Увігнуте сферичне дзеркало дає зображення предмета, збільшене в 3 рази. Чому буде дорівнювати лінійне збільшення того ж предмета, якщо увігнуте дзеркало замінити опуклим з тим же радіусом сферичної поверхні?

Розв'язання. $\Gamma_2 = \frac{3}{7}$ у випадку дійсного зображення та $\Gamma_2 = \frac{3}{5}$ у випадку уявного зображення. За формулою сферичного увігнутого дзеркала $\frac{1}{d} \pm \frac{1}{\Gamma_1 d} = \frac{1}{F}$. Для опуклого з тим же радіусом $\frac{1}{d} - \frac{1}{\Gamma_2 d} = -\frac{1}{F}$, звідки

$$\Gamma_2 = \frac{\Gamma_1}{2\Gamma_1 \pm 1}$$

9. Формула тонкої лінзи

Лінза – це прозоре тіло обмежене двома сферичними поверхнями (плоска поверхня може розглядатися як сферична, безмежно великого радіуса).



Знайдемо зображення в лінзі товщиною *l*.

Для заломлення на першій сферичній поверхні при прямому ході променів

$$\frac{1}{s}+\frac{n_{2,1}}{a}=\frac{1}{R_1}(n_{2,1}-1)$$

Для заломлення на другій сферичній поверхні при зворотному ході променів.

$$\frac{1}{s^{l}}+\frac{n_{2,1}}{a^{l}}=\frac{1}{R_2}(n_{2,1}-1)$$

Так як $l = a + a^{l}$, то при $l \to 0$ $a^{l} = -a$

З врахуванням останнього після додавання двох попередніх рівнянь, матимемо

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{s^{l}}=(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})\,(n_{2,1}-1)$$

В загальному вигляді

$$\pm\frac{1}{s}\pm\frac{1}{s^{l}}=(\pm\frac{1}{R_1}\pm\frac{1}{R_2})\,(n_{2,1}-1)$$

Тут, зліва, зі знаком мінус береться відстань до уявної точки. Якщо заломлююча поверхня опуклістю звернена до середовища з меншим показником заломлення, то її радіус береться із знаком плюс, якщо поверхня звернена опуклістю до середовища з більшим показником заломлення, то її радіус береться з мінусом.

Приклади

1. Оптична сила скляної лінзи в повітрі дорівнює 3 дптр, у воді 1 дптр. Який показник заломлення скла, із якого зроблена лінза? Показник заломлення води 1,33.

Розв'язання. $D_1 = (n_c-1)(\pm\frac{1}{R_1}\pm\frac{1}{R_2}) = (n_c-1)\, f(R)$, $D_2 = \frac{n_C - n_B}{n_B} f(R)$

$\frac{D_1}{D_2} = \frac{(n_C-1)n_c}{n_C-n_B}$, звідси $n_c = \frac{n_B(D_1-D_2)}{D_1-D_2 n_B} = 1\frac{7}{9}$

2. Лінза дає дійсне зображення предмета, збільшене в 4 рази. Якщо лінзу відсунути на відстань 50 см, дійсне зображення предмета буде зменшеним у 4 рази. Визначити оптичну силу лінзи.

Розв'язання. Для першого зображення за формулою лінзи $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{\Gamma_1 d_1} = D$, звідси $d_1 = \frac{1}{D}-\frac{1}{\Gamma_1 D}$, аналогічно для другого зображення $d_2 = \frac{1}{D}+\frac{1}{\Gamma_2 D}$. $d = d_2 - d_1 = \frac{1}{D}(\frac{1}{\Gamma_2}-\frac{1}{\Gamma_1})$ $D = \frac{1}{d}(\frac{1}{\Gamma_2}-\frac{1}{\Gamma_1})$ = 1,625 дптр

10. Недоліки зображень в оптичних системах. Аберація

Найпоширенішого застосування лінзи знаходять в об’єктивах. Об’єктиви може являти собою одну лінзу (монокль), і, як це буває найчастіше, систему лінз. Розглядаючи предмет за допомогою збільшувального скла, одразу можна помітити спотворення зображення на краях, його розмитість (астигматизм) та різнобарвне забарвлення. Порушується одноцентричність (гомоцентричність) світлових пучків, що спостерігається навіть при проходженні світла через плоскопаралельну пластинку.

В усіх цих випадках спостерігаються невідворотні спотворення зображення – *аберації*.

Причиною цих спотворень є неоднаковість заломлення променів центром і краями лінзи, залежність кута заломлення від відстані променя від оптичної осі лінзи (*сферична аберація*) та частоти (кольору) падаючого випромінювання (*хроматична аберація*).

Зображення точки утворене навіть вузьким пучком променів, що йдуть під кутом до головної оптичної осі перетворюється в пляму, або при певному розташуванні в горизонтальний, чи вертикальний відрізок. Це явище називається *астигматизмом*.

Таким чином проста формула лінзи виконується лише наближено, та й то в припущення, що використовується достатньо малий окіл центральної частини лінзи, об’єкт знаходиться в достатньо малій близькості від оптичної осі, а світло є однокольоровим (монохроматичним).

При конструювання оптичних приладів та пристроїв необхідно усувати похибки аберацій. Це здійснюється підбором комбінації лінз, в яких аберації носять взаємокомпенсуючий характер. Так збиральна лінза розтягує точку фокусу в напрямку наближення, розсіювальна – в напрямку віддалення. Якщо склеїти такі лінзи, то сферична аберація може бути у значній мірі скомпенсована.

Утворюючи комбінацію опуклих та вгнутих лінз різної кривизни, можна усувати хроматичну аберацію. Такі досить складні системи лінз називають *ахроматичними*.

Системи, що усувають астигматизм, називають *анастигматичним.* З їх допомогою можна отримати добре зображення навіть при падінні променів під кутом 60 – 70^0 до головної оптичної осі.